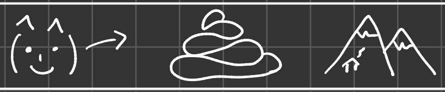
Rapporto a favore: $\frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{P(A)}{1-P(A)}$

Condizionata:

$$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|E)\cdot P(E)}{P(F)}$$

$$P(E) = P(E|F)\cdot P(F) + P(E|F^c)\cdot P(F^c)$$



Valore atteso (1 variabile) $E[X] = \sum_{i\in I} x_i \cdot P_X(x_i)$ $E[f(x)] = \sum_{i\in I} f(x)\cdot P_X(x_i)$

Prop: (lineare) $E[aX+b] = aE[X]+b$ $E[aX+bY+c] = aE[X]+bE[Y]+c$

Varianza (1 variabile): $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ oss: $E[X] = Var(X) + (E[X])^2$

Prop: (quadratica) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$ $Var(X+Y) = Var(X) + Var\,Y + 2cov(X,Y)$

$Var(X+Y+Z) = Var(X)+Var(Y)+Var(Z)+2cov(X,Y)+2cov(X,Z)+2cov(Y,Z)$

Deviazione quadrata: $\sigma(x) = \sqrt{Var(x)}$ Prop: (non lineare) $\sigma(aX+b) = |a|\cdot\sigma(x)$

Lanciamo una moneta due volte $X :=$ # volte in cui è uscito testa oss: $S = \{(TT)(TC)(CT)(CC)\}$ e $X = \{0,1,2\}$

Densità probabilità discreta: $P_X(a) = \begin{cases} 1/2 & se\ a=0 \\ 1/4 & se\ a=1 \\ 1/2 & se\ a=2 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$

Funzione di distribuzione: $F(a) = P(X\le a) = \begin{cases} 0 & se\ a<0 \\ \frac{1}{2} & se\ 0\le a<1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4} & se\ 1\le a<2 \\ 1 & se\ a\ge 2 \end{cases}$

Variabili aleatorie dipendenti

X e Y sono dipendenti se: $\exists\, i,j \in I,J:\ P_{XY}(x_i,y_j) \ne P_X(x_i)\cdot P_Y(y_j)$

X e Y sono indipendenti se $\forall\, i,j\in I,J\ \ P_{XY}(x_i,y_j) = P_X(x_i)\cdot P_Y(y_j)$

Covarianza

$cov(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] = \underline{E[XY] - E[X]\cdot E[Y]}$

Prop:
- $cov(X,X) = Var(X)$ oss: se X e Y indipendenti $cov(X,Y)=0$
- $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
- $cov(X,a) = 0$ (a costante)
- $cov(aX+bY,Z) = a\,cov(X,Z) + b\,cov(Y,Z)$
- $cov(aX,bY) = ab\,cov(X,Y)$

Esempio: $cov(2X+1, X+3Y) = cov(2X,X) + cov(2X,3Y) + \overset{\to 0}{cov(1,X)} + \overset{\to 0}{cov(1,3Y)}$
$= 2cov(X,X) + 6cov(X,Y)$
$= 2Var(X) + 6cov(X,Y)$

Caso strano: $E[g(X,Y)] = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} g(x_i,y_j)\cdot P_{X,Y}(x_i,y_j)$

Esempio: $E[(X-2Y)^4] = \dots$

Variabili aleatorie congiunte

Prob: marginali: $P_X(x_i) = \sum_{j\in J} P_{XY}(x_i,y_j)$ $P_Y(y_j) = \sum_{i\in I} P_{XY}(x_i,y_j)$

Valore atteso:

$E[f(X)g(Y)] = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} f(x_i)\cdot g(y_j)\cdot P_{XY}(x_i,y_j)$

$E[f(X)+g(Y)] = E[f(X)] + E[g(Y)]$

oss: se X e Y indipendenti allora: $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]\cdot E[g(Y)]$

Varianza: $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)\cdot 2cov(X,Y)$

$Var(f(X)+g(X)) = Var(f(X)) + Var(g(Y))\cdot 2cov(f(X),g(Y))$

Esempio $X=\{3,4\}$, $Y=\{1,2\}$

X \ Y	1	2
3	3/10	1/10
4	4/10	2/10

$P_X(a) = \begin{cases} \frac{3}{10}+\frac{1}{10} & se\ a=3 \\ \frac{4}{10}+\frac{2}{10} & se\ a=4 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$ $P_Y(a) = \begin{cases} \frac{3}{10}+\frac{4}{10} & se\ a=1 \\ \frac{1}{10}+\frac{2}{10} & se\ a=2 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$

oss: $E[XY] = 3\cdot1\cdot3/10 + 3\cdot2\cdot1/10 + 4\cdot1\cdot4/10 + 4\cdot2\cdot2/10$

$E[X] = 3\cdot(3/10+1/10) + 4\cdot(4/10+2/10)$

Continue uniformi

$X = Unif([a,b])$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & se\ a\in[a,b] \\ 0 & altrimenti \end{cases}$ $P([c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$

$E[X] = \frac{b+a}{2}$ $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Continue

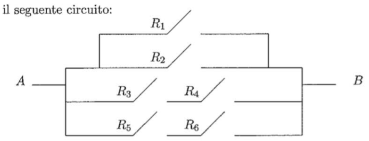
X continua su $[a,b]$ $P_X([c,d]) = \int_c^d f(x)\,dx$ $E[g(X)] = \int_c^d g(x)f(x)\,dx$

oss: dobbiamo trovare l'incognita ponendo $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

X continua definita su $[a,b]$ funzione di distribuzione $= P(X\le k) = \begin{cases} 0 & se\ k<a \\ \int_a^k f\,dx & se\ a\le k<b \\ 1 & se\ k\ge b \end{cases}$

oss: $f(x)\ge 0$ oss: $P([k,k]) = 0$

ESERCIZIO 1
Considerare il seguente circuito:



Ogni relè (interruttore) $R_1, R_2, \dots, R_6$ è chiuso con probabilità 1/3, indipendentemente dagli altri.
1) Determinare la probabilità che passi corrente da A a B.
2) Determinare la probabilità che R_3, R_4 siano chiusi sapendo che passa corrente da A a B.
3) Chiamato X il numero di relè chiusi, determinare $E(X)$, $E(X^2)$.

$E_1 = R_1$ chiuso
$E_2 = R_2$ chiuso
$E_3 = R_3$ e R_4 chiuso
$E_4 = R_5$ e R_6 chiuso

$P(A\to B) = 1 - P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c)P(E_4^c)$ ($\to 1-\frac{1}{3}$, $\to 1-\frac{1}{3}$, $\to 1-(\frac{1}{3})^2$, $\to 1-(\frac{1}{3})^2$)
$= 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}$

Gaussiane $X = Gaus(\mu, \sigma^2)$ μ = media σ = deviazione σ^2 = varianza

$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} = N(0,1)$ ---→ standard se $P(Y<a) = \Phi(a)$

Anagrammi: anagrammi di MAMMA $= \frac{5!}{3!\cdot 2!}$ oss: equivalente $\binom{5}{3}\binom{2}{2}$

Simmetria binomiale: $\binom{6}{3,3}$ va fatto $\frac{\binom{6}{3,3}}{2!}$ e $\frac{\binom{6}{2,2,2}}{3!}$

Binomiale o combinatoria?

usiamo:
- binomiale se <u>non</u> conta l'ordine
- combinatoria se conta l'ordine

Esempio: abbiamo un'urna di venti palline di cui 7 bianche e 13 rosse:
- Binomiale: probabilità di estrarre 4 palline di cui 3 bianche e 1 rossa → $\frac{\binom{7}{3}\binom{13}{1}}{\binom{20}{4}}$
- Combinatoria: probabilità di estrarre 3 palline bianche e poi 1 rossa → $\frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{13}{17}$ → $\frac{\binom{7}{3}}{\binom{20}{3}}\cdot\frac{\binom{13}{1}}{\binom{17}{1}}$

V.A. ASSUME SOLO DUE VALORI SOLITAMENTE 1 E 0 (SUCCESSO, INSUCCESSO)

BERNULLI: $X = Bern(p)$ $\quad P_X(1) = p \quad P_X(0) = 1-p$

PROB. SUCCESSO

V.A. RAPPRESENTA UNA SEQUENZA DI EVENTI SUCCESSO/INSUCCESSO

BINOMIALE: $X = Bin(n, p)$ $\quad P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

PROB. OTTENERE K SUCCESSI

NUM. EVENTI — PROB. SUCCESSO

V.A. RAPPRESENTA NUMERO DI PROVE NECESSARIE PER OTTENERE r SUCCESSI (OSS: ULTIMO È SUCCESSO) (OTTENERE L'r-ESIMO SUCCESSO ALLA k-ESIMA PROVA)

BIN. NEGATIVA: $X = Bin^-(r, p)$ $\quad P(k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{k-r}$

NUMERO SUCCESSI — PROB. SUCCESSO

PROB. DI OTTENERE r SUCCESSI IN k PROVE.

POISSON: $X = Pois(Y)$ $\quad P_X(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$ $\quad$ OSS: $Pois(n \cdot p) \approx Bin(n, p)$ DOVE n GRANDE E p PICCOLO $\quad Pois(\lambda) = Bin\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$

V.A. RAPPRESENTA IL NUMERO DI PROVE NECESSARIE X OTTENERE IL 1° SUCCESSO

GEOMETRICA: $X = Geom(p)$ $\quad P_X(k) = (1-k)^{k-1} \cdot p$

1° SUCCESSO ALLA k-ESIMA PROVA

HYPER GEOM: $X = Hyper(N, K, n)$ $\quad P_X(k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

PROVE

CASI TOT — CASI SUCCESSO

PROB DI OTTENERE k PROVE SUCCESSO